

2025 年普通高等学校招生全国统一考试(全国 I 卷)

数 学

注意事项:

1. 答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案, 答案不能答在试卷上, 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答: 用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内, 写在试卷草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共计 40 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是正确的. 请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1. $(1+5i)i$ 的虚部为

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 6

2. 设全集 $U = \{x | x \text{ 是小于 9 的正整数}\}$, 集合 $A = \{1, 3, 5\}$, 则 $\complement_U A$ 中元素个数为

- A. 0 B. 3 C. 5 D. 8

3. 若双曲线 C 的虚轴长为实轴长的 $\sqrt{7}$ 倍, 则 C 的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{7}$ D. $2\sqrt{2}$

4. 已知点 $(a, 0)$ ($a > 0$) 是函数 $y = 2\tan(x - \frac{\pi}{3})$ 的图象的一个对称中心, 则 a 的最小值为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{4\pi}{3}$

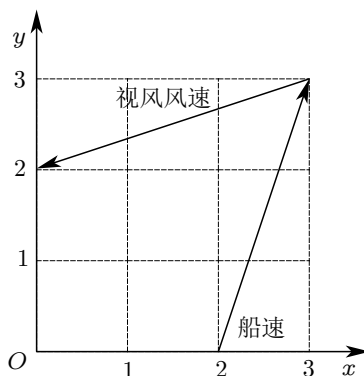
5. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的偶函数, 当 $2 \leq x \leq 3$ 时, $f(x) = 5 - 2x$, 则 $f(-\frac{3}{4})$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

6. 帆船比赛中,运动员可借助风力计测定风速的大小和方向,测出的结果在航海学中称为视风风速,视风风速对应的向量,是真风风速对应的向量与船行风速对应的向量之和,其中船行风速对应的向量与船速对应的向量大小相等,方向相反.表中给出了部分风力等级、风速大小与名称的对应关系.已知某帆船运动员在某时刻测得的视风风速对应的向量与船速对应的向量如图(风速的大小和向量的大小相同,单位 m/s),则真风为

A. 轻风 B. 微风 C. 和风 D. 劲风

等级	风速大小	名称
2	1.1~3.3	轻风
3	3.4~5.4	微风
4	5.5~7.9	和风
5	8.0~10.1	劲风



7. 若圆 $x^2 + (y+2)^2 = r^2 (r > 0)$ 上到直线 $y = \sqrt{3}x + 2$ 的距离为 1 的点有且仅有 2 个,则 r 的取值范围是
- A. $(0,1)$ B. $(1,3)$ C. $(3, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$
8. 若实数 x, y, z 满足 $2 + \log_2 x = 3 + \log_3 y = 5 + \log_5 z$,则 x, y, z 的大小关系不可能是
- A. $x > y > z$ B. $x > z > y$ C. $y > x > z$ D. $y > z > x$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分。

9. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D 为 BC 中点,则
- A. $AD \perp A_1C$ B. $BC \perp$ 平面 AA_1D
C. $AD \parallel A_1B_1$ D. $CC_1 \parallel$ 平面 AA_1D
10. 设抛物线 $C: y^2 = 6x$ 的焦点为 F ,过 F 的直线交 C 于 A, B ,直线 l 的方程是 $x = -\frac{3}{2}$,过 A 向直线 l 作垂线,垂足为 D ,过 F 且垂直于 AB 的直线交 l 于 E ,则
- A. $|AD| = |AF|$ B. $|AE| = |AB|$
C. $|AB| \geq 6$ D. $|AE| \cdot |BE| \geq 18$

11. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{4}$, 若 $\cos 2A + \cos 2B + 2\sin C = 2$, $\cos A \cos B \sin C = \frac{1}{4}$, 则

A. $\sin C = \sin^2 A + \sin^2 B$

B. $AB = \sqrt{2}$

C. $\sin A + \sin B = \frac{\sqrt{6}}{2}$

D. $|AC|^2 + |BC|^2 = 3$

三、填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共计 15 分.

12. 若直线 $y = 2x + 5$ 是曲线 $y = e^x + x + a$ 的切线, 则 $a =$ _____.

13. 若一个正项等比数列的前 4 项和为 4, 前 8 项和为 68, 则该等比数列的公比为 _____.

14. 一个箱子里有 5 个相同的球, 分别以 1~5 标号, 从中有放回的取三次, 记至少被取出一次的球的个数为 X , 则 $E(X) =$ _____.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

为研究某疾病与超声波检查结果的关系,从做过超声波检查的人群中随机抽样调查了 1000 人,得到如下列联表:

组别 \ 超声波检查结果	超声波检查结果		合计
	正常	不正常	
患该疾病	20	180	200
未患该疾病	780	20	800
合计	800	200	1000

(1) 记超声波检查结果不正常者患该疾病的概率为 p , 求 p 的估计值;

(2) 根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 分析超声波检查结果是否与患该疾病有关.

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}, \text{ 其中 } a + b + c + d = n$$

$P(\chi^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

16. (15 分)

设数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=3$, $\frac{a_{n+1}}{n} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$.

(1) 证明: 数列 $\{na_n\}$ 为等差数列;

(2) 给定正整数 m , 设函数 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$, 求 $f'(-2)$.

17. (15 分)

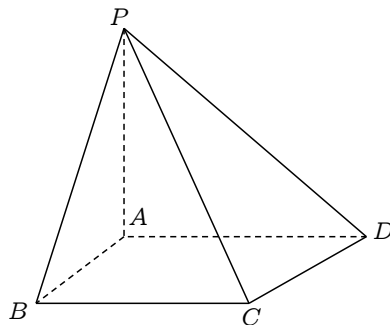
如图所示的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$.

(1) 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD ;

(2) 若 $PA = AB = \sqrt{2}$, $AD = \sqrt{3} + 1$, $BC = 2$, P , B , C , D 在同一个球面上, 设该球面的球心为 O .

(i) 证明: O 在平面 $ABCD$ 上;

(ii) 求直线 AC 与直线 PO 所成角的余弦值.



18. (17分)

设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 下顶点为 A , 右顶点为 B , $|AB| = \sqrt{10}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 已知动点 P 不在 y 轴上, 点 R 在射线 AP 上, 且满足 $|AP| \cdot |AR| = 3$.

(i) 设 $P(m, n)$, 求 R 的坐标(用 m, n 表示);

(ii) 设 O 为坐标原点, Q 是 C 上动点, 直线 OR 的斜率是直线 OP 的斜率的 3 倍, 求 $|PQ|$ 的最大值.

19. (17 分)

- (1) 求函数 $f(x) = 5\cos x - \cos 5x$ 在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 的最大值;
- (2) 给定 $\theta \in (0, \pi)$, 设 a 为实数, 证明: 存在 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, 使得 $\cos y \leq \cos \theta$;
- (3) 若存在 φ , 使得对任意 x , 都有 $5\cos x - \cos(5x + \varphi) \leq b$, 求 b 的最小值.